

## 1 Abstract

Der folgende Artikel befasst sich mit der Modellierung des schiefen Wurfs am Beispiel eines Volleyballs. Hierzu wird die vektorielle Darstellung der Geschwindigkeit gespalten in eine x- und eine y-Wirkung verwendet und die Daten durch eine numerische Simulation errechnet und verglichen.

## 2 Einleitung

Im Folgenden wird der schiefe Wurf am Beispiel des Fluges eines Volleyballs betrachtet. Als Leitfrage kann man "Wie lässt sich der Wurf eines Volleyballs modellieren?" oder "Inwiefern ist die vektorielle Darstellung der Geschwindigkeit unter der Annahme, dass der Ball in einem Vakuum ist, hinreichend, um den realen Tatbestand darzustellen?" ansehen. Die primäre Grundvoraussetzung ist die Tatsache, dass Objekte in einem Vakuum immer mit Beschleunigung  $g$  zu dem Gravitationschwerpunkt gezogen werden, und dass dieser auf der Erde in etwa  $9.81 \text{ m/s}^2$  ist. Außerdem wird in diesem Modell Luftwiderstand vernachlässigt und der Ball als Punkt ohne Größe betrachtet.

## 3 Methoden

Zuerst wurde der Wurf des Balles mit einer Kamera aufgezeichnet und anschließend eine Liste der Positionen des Balles bezüglich der x-Achse (horizontale Position) und der y-Achse (vertikale Position) in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  erstellt, wobei alle 0.1 Sekunden die Werte aufgenommen wurden. Anschließend wurde die mittlere Geschwindigkeit des ersten Intervalls in x- und y-Richtung berechnet. Um den Sachverhalt nun zu modellieren, werden Geschwindigkeit und Beschleunigung in eine x- und eine y-Komponente geteilt und mithilfe dessen der Sachverhalt numerisch simuliert (mithilfe eines Maple-Programms). Dabei wurde angenommen, dass keine Beschleunigung in x-Richtung stattfindet, eine Beschleunigung von  $-g$  ( $-9.81 \text{ m/s}^2$ ) in y-Richtung auf den Ball wirkt, und die Startpositionen und Startgeschwindigkeiten ( $(0; 1) \text{m}$ ,  $(2, 4 \text{m/s})$ ) von den Messdaten übernommen. Der Algorithmus der Simulation ist in Abb. 1 zu sehen.

## 4 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Simulation sind in Abb. 2 zu sehen, die überlagerten Graphiken des Experiments und der Vorhersagen der Simulation zeigt Abb. 3.

```

> NumSim := proc(a, b, c, d)
  local i, x, y, v, w;
  x := a;
  y := b;
  v := 0;
  w := 1;
  for i from 1 to 11 do
    x := x +  $\frac{1}{10}$ ·c;
    y := y +  $\frac{1}{10}$ ·d;
    v := v +  $\frac{1}{10}$ ·x;
    w := w +  $\frac{1}{10}$ ·y;
    print( $\left(\frac{i}{10}, x, y, v, w\right)$ );
  end do;
end proc;
> NumSim(2, 4, 0, -9.81)

```

Abbildung 2 - Die Ergebnisse der Simulation, in der Form  $(\text{Zeit in s}, x\text{-Geschwindigkeit in m/s}, y\text{-Geschwindigkeit in m/s}, x\text{-Beschleunigung in m/s}^2, y\text{-Beschleunigung in m/s}^2)$

Abbildung 1 - Das Programm der numerischen Simulation, welches bei gegebenen Startgeschwindigkeit und Beschleunigungen die Positionen und Geschwindigkeiten mit  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$  bis  $t = 1.1 \text{ s}$  berechnet

Die Simulationsgraphik ist der Experimentgraphik relativ ähnlich und stellt in Anbetracht der starken (nicht geltenden) Grundannahmen und wahrscheinlicher Messungenauigkeiten ein zufriedenstellendes Modell dar. Die Frage nach Fehlerquellen und Optimierungsmöglichkeiten wird im nächsten Abschnitt genauer diskutiert.

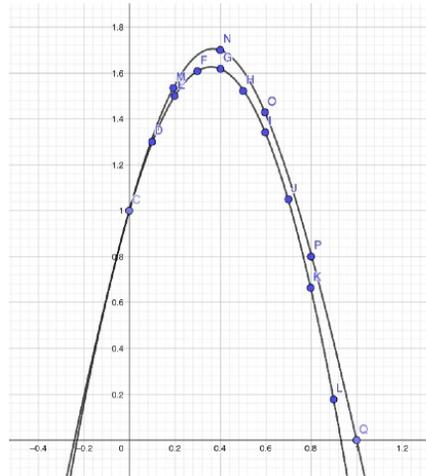


Figure 1: Die Ergebnisse der numerischen Simulation gelegt über die Flugkurve des Balls, die Funktion mit dem höheren Maximum (durch N) ist die reale Flugbahn, die x-Achse stellt die Zeit in s und die y-Achse die Höhe in m dar

## 5 Diskussion

Da sich die Ergebnisse des Experiments und das Ergebnis der Simulation sehr ähneln (die Symmetriegeraden sind fast identisch), ist anzunehmen, dass das Modell den Sachverhalt an sich relativ genau modelliert. Wenn man  $G$  als Vergleichswert zur Bestimmung der Ähnlichkeit zweier gleich orientierter Parabeln  $f$  und  $g$  in einem Intervall als  $\frac{\max(|f(x)-g(x)|)}{\max(f)}$  definiert, erhält man hier einen Wert von ca 0.08, was nochmal untermauert, dass sich die Parabeln recht ähnlich sind. Unterschiede können natürlich zum Einen durch Messungenauigkeiten begründet werden (die aufgrund von relativ ungenauen Messverfahren wahrscheinlich sind), liegen aber zu großen Teilen auch daran, dass zur Vereinfachung des Modells einige unrealistische Annahmen, genauer gesagt die Vernachlässigung von Luftwiderstand und der Größe des Balls, getätigt wurden. Andererseits sorgt die regelmäßige Form des Balls und die Ordinarität des Wurfs dafür, dass sich das Modell leicht auf andere Sportarten mit gleichmäßigen Bällen übertragen lassen sollte. Um die Ergebnisse des Modells zu verbessern könnte man die Numerische Simulation durch eine ähnlich definierte Funktion ersetzen und die Kraftvektoren als Ableitung betrachten. Außerdem könnte man, anstatt die mittlere x- und y-Steigung am Anfang zu berechnen den Winkel zwischen x-Achse und der Flugbahn und eine Startgeschwindigkeit berechnen und daraus dann die zweite mithilfe des Tangens ermitteln. Um Messungenauigkeiten zu verhindern, könnte man mit einer besseren Kamera oder einer besseren Videoaufnahme genauere Zeitabschnitte betrachten und die Distanzen exakter bestimmen, was bei der Simulation einige Folgeabweichungen eliminieren könnte. Zur Verbesserung des Modells selbst wäre wohl der wichtigste Schritt, durch mehrere Experimente ein Modell zum Luftwiderstand aufzustellen und dieses mit einzubinden, wobei man dabei auch die Annahme, dass der Ball formlos ist, klären könnte. Als interessante weiterführende Experimente, die eigener, anderer Modellierung bedürfen, könnte man den Flug von sich drehenden, unregelmäßigen Bällen (und den folgenden eiernden Flug, Magnus-Effekt), die Bewegung mehrerer umeinander fallenden, aufeinander Anziehung ausübenden Objekte (Chaostheorie, eventuell eine Modellierung bei zwei Objekten), oder den Flug von Objekten nach dem Aufkommen (also zum Beispiel das Abspringen vom Boden im Zusammenhang mit Reibung) betrachten.

## 6 Fazit

Zusammenfassend hat die Modellierung des schiefen Wurfs mithilfe von Kraftvektoren und einer numerischen Simulation bis zu einer zufriedenstellenden Genauigkeit geklappt, die Flugkurven sind ähnlich und haben sehr ähnliche Symmetriezentren, wobei Unterschiede wohl primär auf die Vernachlässigung des Luftwiderstandes und auf Messungenauigkeiten zurückzuführen sind.